

Obliczanie granic ciągów i funkcji; pochodne funkcji.

Obliczyć granice:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ Odp. $\frac{1}{2}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$ Odp. 3

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$ Odp. $\frac{4}{3}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$ Odp. $\frac{1}{2}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ Odp. 0

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$ Odp. 0

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$ Odp. $\frac{1}{2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, m, n liczby całkowite Odp. $\frac{m}{n}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$ Odp. $\frac{1}{4}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$ Odp. 0

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$ Odp. 100

12. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ Odp. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

13.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ Odp. 3

13.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$ Odp. 0

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ Odp. 3

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}$ Odp. k

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ Odp. $\frac{\alpha}{\beta}$

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ Odp. $\ln a$

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ Odp. e

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ Odp. 0

Obliczyć pochodne funkcji:

1. $y = \frac{x+1}{x-1}$

2. $y = \sin x + \cos x$

3. $y = \frac{1-x^2}{\sqrt{\pi}}$

4. $y = \frac{x}{x^2+1}$

5. $y = \frac{2}{x^3-1}$

6. $y = (1+2x)^{10}$

7. $y = (1-x^2)^{10}$

8. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ Znaleźć $y'(2)$

9. $y = \frac{x}{1-\cos x}$

10. $y = \arctg x^2$

11. $y = \sin \frac{1}{x}$

12. $y = \cos^3 4x$

13. $y = \sin(\sin x)$

14. $y = \frac{1}{\ln x}$

15. $y = \ln(1-2x)$

16. $y = \sqrt{\ln x}$

17. $y = x \ln x$

18. $y = x^x$

19. $y = x^{x^x}$

20. $y = x^{\ln x}$